

ABSTRACT

As a fluid flows in a deflecting pipe it tends to be accelerated. When the fluid velocity is very high the pipe may become unstable since its natural frequency decreases. The pipe will oscillates and eventually becomes fatigue when the natural frequency decreases under the certain value. This phenomenon is discussed in the present study by using a mathematical model of pipe motion. The model is solved to obtain the natural frequency and the unstable condition of a fluid-conveying pipe with pinned ends. The mathematical results show that the natural frequency of the pipe decreases as the fluid velocity increases. This result agrees with the experimental data with an error of about seven percent. As fluid velocity equals to the critical velocity, the natural frequency becomes zero. It means that the force required to make the fluid conform to the pipe curvature is greater than the stiffness of the pipe. As a result the pipe bows out and finally buckles.

Kata kunci: Pipa, Getaran, Frekuensi Natural, Kecepatan Kritis

PENDAHULUAN

Aliran fluida di dalam pipa dapat memberikan tekanan ke dinding sehingga pipa mengalami lendutan. Pada bagian pipa yang melendut aliran fluida cenderung mengalami percepatan yang memunculkan gaya sentrifugal. Pada kondisi gaya sentrifugal tersebut akan menyebabkan hentakan pipa yang bisa memunculkan peristiwa yang disebut *water hammer*. Bentuk yang paling sering dikenal dari *water hammer* adalah suara gemeretak pada pipa di rumah tangga di pagi hari ketiga keran-keran dibuka. Aliran steady juga dapat melengkungkan pipa. Aliran steady fluida berkecepatan tinggi di dalam pipa berdinding tipis di samping bisa menyebabkan *bukling* juga membuat pipa bergerak seperti ayunan ujung cambuk. Semua jenis pelengkungan ini disebut ketidak stabilan pipa-pipa saluran fluida.

Kestabilan pipa-pipa saluran fluida sangat penting karena frekuensi natural pipa umumnya menurun dengan peningkatan kecepatan aliran. Dalam kasus aliran berkecepatan tinggi melalui pipa-pipa berdinding tipis, seperti saluran bahan bakar pada roket dan pipa pesat ke turbin air, penurunan frekuensi natural menjadi sangat berbahaya. Pipa mungkin akan beresonansi atau mengalami kegagalan *fatigue* jika frekuensi natural turun drastis sampai di bawah batas tertentu. Jika kecepatan fluida menjadi sangat tinggi, pipa bisa menjadi tidak stabil.

Getaran pipa akibat aliran fluida telah dibahas pada kasus aliran yang menyebabkan getaran pipa

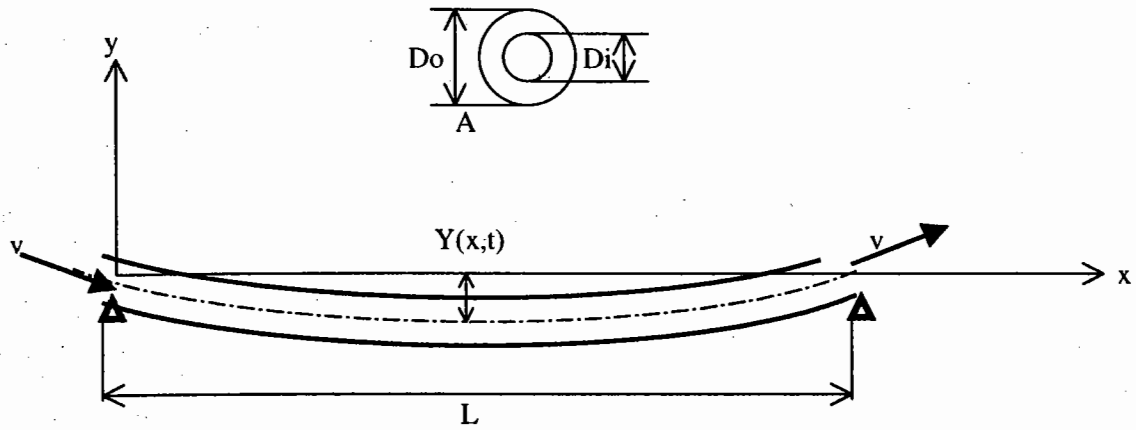
saluran minyak trans Arab (Ashley and Haviland, 1950). Housner (1952) adalah orang pertama yang menurunkan persamaan gerak pipa saluran fluida. Persamaan gerak tersebut diterapkan pada kasus getaran pipa trans Arab. Penyelesaian persamaan gerak yang lain juga menunjukkan bahwa getaran pipa tergantung dari kondisi tumpuan ujung-ujung pipa. Pipa yang ditumpu di kedua ujung akan melengkung dan mengalami *bukling* bila kecepatan fluida melampaui kecepatan kritisnya (Niordson, 1958; Liu and Mole, 1974; Dodds and Runyan, 1965).

Pada penelitian ini diuraikan persamaan gerak untuk pipa lurus dengan menggunakan pendekatan Niordson (1958), dan Gregory dan Paidoussis (1966). Persamaan ini kemudian dicari solusinya untuk memperoleh frekuensi natural pipa yang tertumpu di kedua ujungnya.

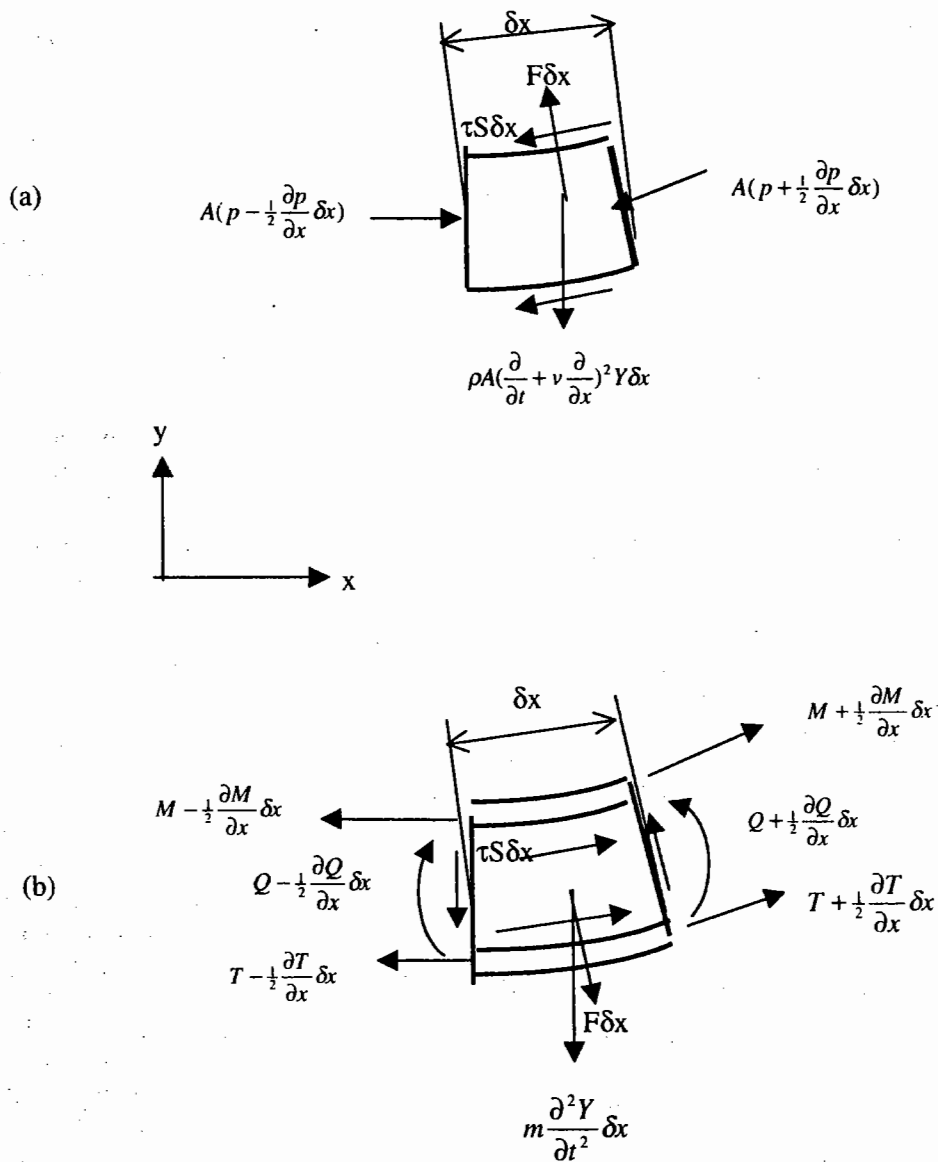
PERSAMAAN GERAK

Gambar 1 menunjukkan sebuah bentangan pipa yang melengkung ke arah transversal sebesar $Y(x,t)$ dari posisi horisontalnya. Fluida mengalir dengan densitas ρ tekanan p dan kecepatan konstan v melalui penampang pipa sebelah dalam dengan luas A . Panjang pipa adalah L , modulus elastisitasnya E , dan momen inersia penampangnya I . Perhatikan elemen kecil yang dipotong dari pipa seperti terlihat dalam Gambar 2.

* Ir. I.N.G. Wardana, M.Eng., Ph.D., Dosen Jurusan Mesin Fakultas Teknik Universitas Brawijaya, Malang



Gambar 1. Pipa saluran fluida dengan kedua ujung tertumpu



Gambar 2. Gaya dan momen yang bekerja pada elemen fluida (a) dan elemem pipa (b)

Elemen fluida pada Gambar 2 (a) dikeluarkan dari elemen pipa pada Gambar 2 (b) untuk memudahkan analisis. Aliran fluida di dalam pipa lengkung akan mengalami percepatan dan membangkitkan gaya sentrifugal sebesar $\rho A (\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x})^2 Y \delta x$. Gaya ini dilawan oleh tekanan elemen fluida, $\rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} \delta x$ dan gaya tekanan tiap satuan panjang, F yang dikenakan ke elemen fluida oleh dinding pipa. Kesetimbangan gaya-gaya pada elemen fluida δx ke arah y pada perubahan yang sangat kecil menghasilkan

$$F - \rho A \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = \rho A (\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x})^2 Y \quad (1)$$

sedangkan kesetimbangan gaya-gaya sejajar dengan sumbu menjadi

$$A \frac{\partial p}{\partial x} + \tau S = 0 \quad (2),$$

dengan S adalah keliling lingkaran bagian dalam pipa, dan τ adalah tegangan geser pada dinding pipa. Kesetimbangan gaya-gaya pada elemen pipa dalam Gambar 2(b) menghasilkan

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \tau S - Q \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = 0 \quad (3)$$

dengan T adalah tegangan aksial pipa dan Q adalah gaya geser transversal pipa. Gaya pada elemen pipa yang tegak lurus dengan sumbu pipa memberikan percepatan kepada elemen pipa ke arah y sehingga persamaan gerak pipa ke arah tegak lurus sumbu menjadi

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + T \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} - F = m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} \quad (4)$$

dengan m adalah massa tiap satuan panjang pipa kosong.

Hubungan gaya geser transversal Q dengan momen bengkok M pipa adalah

$$Q = -\frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 Y}{\partial x^3} \quad (5).$$

Karena $Q \sim \partial^3 Y / \partial x^3$, maka orde dari komponen ke tiga sisi kiri persamaan (3) adalah Y^2 . Untuk perubahan bentuk yang sangat kecil harga defleksi Y adalah sangat kecil sehingga Y^2 menjadi semakin sangat kecil dan bisa diabaikan. Dengan demikian persamaan (3) akhirnya menjadi

$$\frac{\partial T}{\partial x} + \tau S = 0 \quad (6).$$

Persamaan (1), (4), dan (5) digabungkan untuk menghilangkan F dan Q sebagai berikut:

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + (\rho A - T) \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + \rho A (\frac{\partial}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial x})^2 Y + m \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (7).$$

Tegangan geser τ bisa dihilangkan dari persamaan (2) dan (6) sehingga menghasilkan

$$\partial(\rho A - T) / \partial x = 0 \quad (8).$$

Persamaan ini menunjukkan bahwa $(\rho A - T)$ tidak tergantung pada posisi sepanjang pipa. Pada ujung pipa di mana $x = L$, tegangan pada pipa adalah nol, dan tekanan fluida sama dengan tekanan udara luar. Jadi $p = T = 0$ pada $x = L$, dan persamaan (8) mengimplikasikan bahwa

$$\rho A - T = 0 \quad (9)$$

Substitusi persamaan (9) ke persamaan (7) menghasilkan

$$EI \frac{\partial^4 Y}{\partial x^4} + \rho A v^2 \frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} + 2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t} + m_1 \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

dengan $m_1 = m + \rho A$ adalah massa tiap satuan panjang pipa ditambah fluida dalam pipa. Suku pertama dan terakhir persamaan (10) adalah kekakuan dan massa yang selalu muncul tidak peduli ada atau tidaknya aliran fluida. Suku ke dua dari kiri menyatakan gaya yang diperlukan untuk mengubah arah fluida agar sesuai dengan kelengkungan pipa. Suku ke tiga dari kiri adalah gaya yang diperlukan untuk memutar elemen fluida agar setiap titik pada bentangan pipa berotasi dengan kecepatan sudut $\partial^2 Y / \partial x \partial t$.

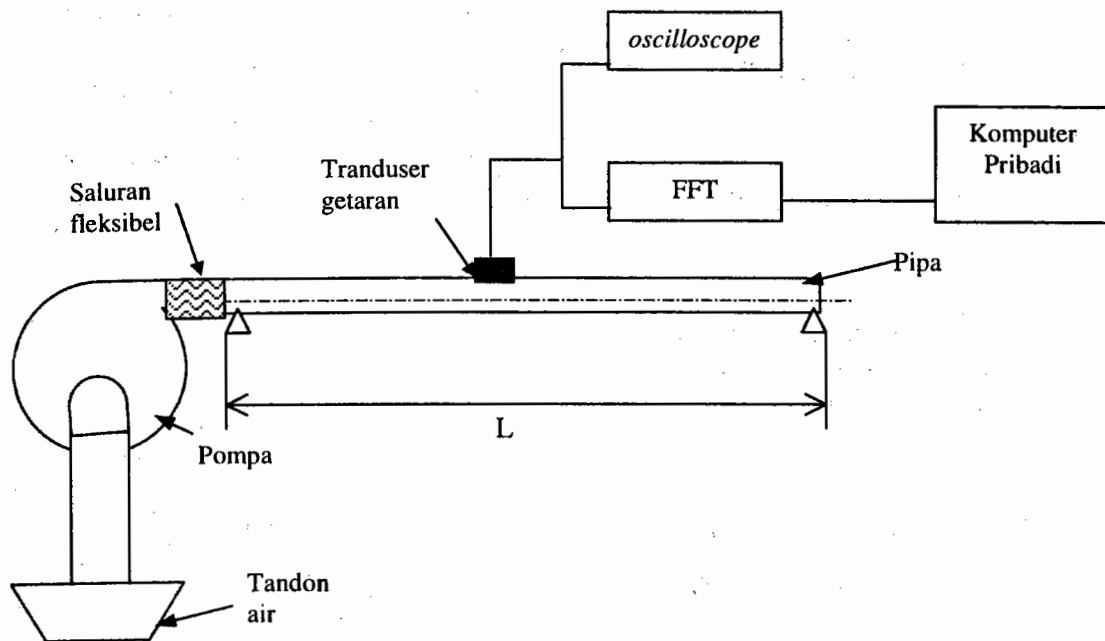
Kondisi batas untuk keadaan seperti pada gambar 1 adalah

$$Y(0,t) = Y(L,t) = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}(0,t) = \frac{\partial^2 Y}{\partial t^2}(L,t) = 0 \quad (11)$$

EKSPERIMEN

Untuk validasi hasil perhitungan analitis dilakukan eksperimen terhadap pipa tunggal yang terbuat dari paduan aluminium berdiameter 2,54 cm dengan tebal dinding 0,165 cm dan modulus elastisitas $E = 0,675 \times 10^7$ N/cm². Inersia penampang pipa $I = 0,87$ cm⁴. Pipa ditumpu pada kedua ujungnya sejauh $L = 300$ cm seperti pada Gambar 3. Air dialirkan dari pompa dengan debit aliran bisa diubah-ubah. Antara pompa dan pipa yang diuji disambung dengan saluran fleksibel agar getaran dari pompa tidak diteruskan ke pipa. Massa air per satuan panjang di dalam pipa $\rho A = 3,8 \times 10^{-3}$ kg/cm dan massa pipa per satuan panjang $m = 7,1 \times 10^{-3}$ kg/cm



Gambar 3 Peralatan Uji

Debit aliran diukur pada sisi keluar pipa dengan flow meter. Debit maksimum yang mampu dialirkan oleh pompa adalah $0,08 \text{ m}^3/\text{menit}$. Kecepatan rata-rata aliran di dalam pipa dihitung dari debit aliran dibagi luas penampang pipa sebelah dalam. Getaran pipa akibat aliran diukur dengan tranduser getaran seperti Gambar 3. Sinyal dari tranduser diolah dengan FFT Analyser dan di simpan di memori komputer.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Penyelesaian Persamaan Gerak

Solusi dari persamaan (10) adalah

$$Y(x,t) = a_1 \psi(x) \sin \omega t + a_2 \psi(x) \cos \omega t, \quad (12)$$

dengan a_1 dan a_2 saling tergantung.

Kondisi batas pada persamaan (11) bisa dipenuhi oleh bentuk mode sinusoidal

$$\psi_n(x) = \sin n\pi x/L; n = 1, 2, 3, \dots \quad (13)$$

yang jika disisipkan ke persamaan (10) membuat suku-suku pertama, kedua, dan ke empat dari kiri pada persamaan (10) berubah sebanding dengan $\sin n\pi x/L$, sedangkan *derivative* campuran pada suku ke tiga sebanding dengan $\cos n\pi x/L$. Jika digunakan bentuk mode simetris *derivative* campuran akan menghasilkan bentuk antisimetris. Jadi solusinya harus mengandung suku-suku simetris dan antisimetris ruang, dan koefisien dari suku-suku ini harus tidak saling tergantung.

Kondisi ini menunjukkan bahwa solusi persamaan gerak pipa adalah

$$Y_j(x,t) = \sum_{n=1,3,5,\dots} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \omega_j t + \sum_{n=2,4,6,\dots} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \omega_j t; j=1,2,3,\dots \quad (14)$$

dengan ω_j adalah frekuensi natural dari j mode getaran. Jika solusi ini diterapkan pada persamaan (9), suku *derivative* campuran (suku ketiga dari kiri) memunculkan suku-suku yang mengandung

$$\cos n\pi x/L; n = 1, 2, 3, \dots \quad (15)$$

dan bisa diekspansikan dalam deret Fourier fungsi sinus sepanjang pipa sebagai berikut:

$$\cos \frac{n\pi x}{L} = \sum_{r=1,2,3,\dots} b_{nr} \sin \frac{r\pi x}{L}; n=1,2,3,\dots; b_{nr} = \frac{2r}{\pi} \frac{[1 - (-1)^{n+r}]}{r^2 - n^2} \quad (16)$$

Suku-suku pada persamaan (10) dapat dikelompokkan kedalam $\sin \omega t$ atau $\cos \omega t$, kemudian disamakan dengan nol dan menghasilkan persamaan berikut:

$$a_n [E I n^4 (\frac{\pi}{L})^4 - \rho A v^2 n^2 (\frac{\pi}{L})^2 - m \omega_j^2] = \frac{8 \rho A v \omega_j}{L} \sum_{r=2,4,6} a_r \frac{r^2}{r^2 - n^2}; n=1,3,5,\dots \quad (17)$$

$$a_n \left[E I n^4 \left(\frac{\pi}{L} \right)^4 - \rho A v^2 n^2 \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 - m_i \omega_j^2 \right] \\ = \frac{8 \rho A v \omega_j}{L} \sum_{r=1,3,5} a_r \frac{r^2}{r^2 - n^2} \quad ; n=2,4,6,\dots \quad (18)$$

Persamaan-persamaan ini bisa disusun dalam bentuk matrix:

$$[[K] - \omega_j^2 m_i [I]] \{a\} = 0 \quad (19)$$

dengan [I] adalah matrix identitas yang berharga satu pada diagonal dan nol untuk entries yang lainnya. [K] adalah matrix kekakuan dengan entries k_{rs} ;

$$k_{rs} = \begin{cases} E I r^4 (\pi/L)^4 - \rho A v^2 r^2 (\pi/L)^2; \dots\dots\dots r = s, \\ \frac{8 \rho A v \omega_j}{L} \frac{s^2}{r^2 - s^2}; \dots\dots\dots r \neq s, r+s = \text{ganjil}, \\ 0; \dots\dots\dots r \neq s, r+s = \text{genap}. \end{cases} \quad (20)$$

Penyelesaian dari persamaan (18) dicoba dengan cara berikut

$$[[K] - \omega_j^2 m_i [I]] = 0 \quad (21)$$

sehingga penyelesaian persamaan (21) menjadi:

$$\left[1 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{\omega_N} \right)^2 \right] \left[16 - 4 \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 - \left(\frac{\omega_j}{\omega_N} \right)^2 \right] \\ + \frac{256}{9\pi^2} \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \left(\frac{\rho A}{m_i} \right) \left(\frac{\omega_j}{\omega_N} \right)^2 = 0 \quad (22)$$

dengan ω_N adalah frekuensi natural dasar pipa pada saat tidak ada aliran fluida:

$$\omega_N = \frac{\pi^2}{L^2} \left(\frac{EI}{m_i} \right)^{1/2} \quad (23)$$

dan kecepatan kritis aliran pipa:

$$v_c = \frac{\pi}{L} \left(\frac{EI}{\rho A} \right)^{1/2} \quad (24)$$

Penyelesaian eksak persamaan (22) adalah:

$$\left(\frac{\omega_j}{\omega_N} \right)^2 = \alpha \pm \left\{ \alpha^2 - 4 \left[1 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \right] \left[4 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \right] \right\}^{1/2}, j=1,2, \quad (25)$$

dengan

$$\alpha = 8.5 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \left[2.5 + \frac{128}{9\pi^2} \left[\frac{\rho A}{m_i} \right] \right] \quad (26)$$

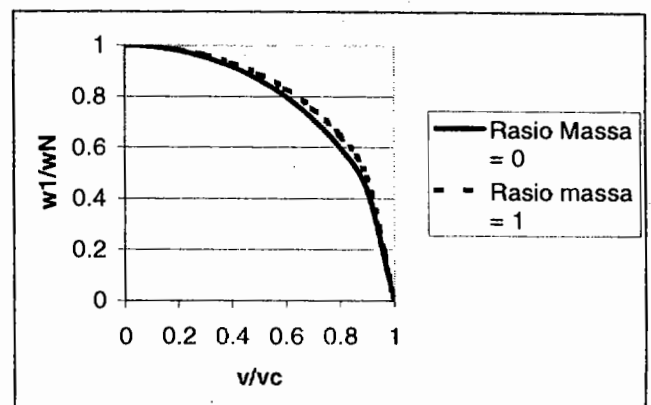
Nilai ω_1 dan ω_2 real untuk semua harga $v/v_c \leq 1$; ω_1 adalah frekuensi dasar pipa saluran fluida. Harga ω_1 ditampilkan pada Gambar 4 sebagai fungsi dari v_c dan perbandingan massa ($\rho A/m_i$).

Nampak pada Gambar 4 bahwa ω_1 hanya sedikit sekali dipengaruhi oleh $\rho A/m_i$. Jika $\rho A/m_i$ dibuat sama dengan nol, maka persamaan (25) menjadi

$$\frac{\omega_1}{\omega_N} = \left[1 - \left(\frac{v}{v_c} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

yang tingkat keakuratannya 2.6% untuk semua $v \leq v_c$ dan $\rho A/m_i \leq 0.5$, dan 12.8% untuk semua $v \leq v_c$ dan $\rho A/m_i \leq 1$.

Dari Gambar 4 terlihat bahwa frekuensi natural menurun dengan meningkatnya aliran fluida. Jika $v=v_c$ maka frekuensi terendah dari pipa akan sama dengan nol. Dengan kata lain pipa akan melengkung karena gaya yang diperlukan untuk membuat fluida mengikuti lengkungan pipa lebih besar dari kekakuan pipa.



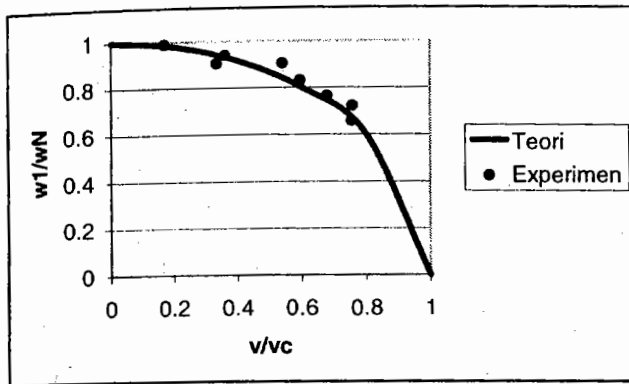
Gambar 4 Frekuensi natural dasar pipa sebagai fungsi dari kecepatan aliran

Perbandingan Dengan Hasil Eksperimen.

Frekuensi natural teoritis yang dihitung dari persamaan (27) dibandingkan dengan hasil eksperimen seperti terlihat dalam Gambar 5. Hasil secara teoritis sesuai dengan hasil eksperimen dengan penyimpangan berkisar antara 7,5%.

Secara matematis, ketidakstabilan muncul dari suku *derivative* campuran $2\rho A v \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial t}$ yang merupakan suku ketiga dari kiri pada persamaan (10). Suku *derivative* campuran menghasilkan sisi kanan dari persamaan (18), (19), (23). Suku *derivative* campuran menyatakan gaya yang dikenakan pada pipa oleh aliran yang fasenya selalu 90° dari defleksi pipa.

dan selalu se fase dengan kecepatan pipa. Gaya ini pada dasarnya adalah sebuah mekanisme peredaman negatif yang menyedot energi dari aliran dan menyerahkan energi ke lengkungan pipa sehingga menyebabkan pipa bergetar bahkan sampai tertekuk.



Gambar 5 Perbandingan antara analitik dan eksperimen

KESIMPULAN

Hasil perhitungan yang diperoleh dari persamaan gerak getaran pipa akibat aliran fluida sesuai dengan hasil eksperimen. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa frekuensi natural pipa berkurang dengan meningkatnya kecepatan kritis fluida.

Pada saat kecepatan fluida sama dengan kecepatan kritisnya maka frekuensi dasar pipa

menjadi nol. Pada saat ini gaya yang diperlukan untuk mengarahkan aliran fluida agar sesuai dengan kelengkungan pipa jauh lebih besar dari kekakuan pipa sehingga pipa akan melengkung dan tertekuk.

DAFTAR PUSTAKA

- Ashley, H., and G. Haviland, 1950: "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *J. Appl. Mech.* 17, 229-232.
- Dodds, H.L., and H. Runyan, 1965: "Effect of High-Velocity Fluid Flow in the Bending Vibrations and Static Divergence of a Simply Supported Pipe," *National Aeronautics and Space Administration Report NASA TN D-2870*.
- Gregory, R.W., and M.P. Paidoussis, 1966: "Unstable Oscillation of Tubular Cantilevers Conveying Fluid - I Theory," *Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A* 293, 512-527.
- Housner, G. W., 1952: "Bending Vibrations of a Pipe Line Containing Flowing Fluid," *J. Appl. Mech.* 19, 205-208.
- Liu, H.S., and C.D. Mote, 1974: "Dynamics Response of Pipe Transporting Fluids," *J. Eng. for Industry*, 96, 591-596.
- Niordson, F.I.N., 1958: "Vibrations of a Cylindrical Tube Containing Flowing Fluid," *Trans. Roy. Inst. Technol., Stockholm*. 73.